

# Algèbre et analyse élémentaires I

Code MM1, 9 ECTS, Semestre S1

**Prérequis :** MM1 **Évaluation :** Contrôle continu et examen final

**Mentions concernées :** Mathématiques, MIAHS, Info, Physique, Chimie

**Horaires hebdomadaires :** 3 h CM + 4,5 h TD

## Objectifs

Utiliser les complexes dans différents contextes. Maîtriser les notions de base associées aux fonctions, s'initier aux rudiments de l'algèbre linéaire.

## Programme

### Note sur les rappels de Terminale

1. Il s'agit de points au programme de Terminale S, mais pas nécessairement des autres filières (ES et Technologique notamment).
2. Rien ne pousse à les traiter séparément du reste du programme.

## 1 Nombres complexes (2,5 semaines)

### 1. Rappels de Terminale

- (a) Partie réelle et imaginaire. Conjugué. Module, inégalité triangulaire. Relation  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan muni d'un repère orthonormé.
  - (b) Somme et produit de deux nombres complexes. Inverse d'un nombre complexe non nul.
  - (c) Argument d'un nombre complexe. Forme trigonométrique et notation exponentielle.
2. Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution des équations du second degré à coefficients complexes (à coefficients réels en Terminale).
  3. Racines  $n^e$  de l'unité.
  4. Formules d'Euler  $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  et  $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$  et formule de Moivre  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .
  5. Formule du binôme.
  6. Applications à la trigonométrie : formules d'addition du cosinus et du sinus, formules de duplication.

## 2 Propriétés de $\mathbb{R}$ (1,5 semaine)

### 1. Rappels de Terminale.

- (a) Ordre sur  $\mathbb{R}$ . Opérations sur les inéquations : addition, multiplication par un nombre positif, par un nombre négatif.
  - (b) Valeur absolue.
  - (c) Intervalles de  $\mathbb{R}$ .
2. Ordre sur  $\mathbb{R}$  : majorant, minorant, plus grand et plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure.
  3. Nombres rationnels et nombres irrationnels. Inclusions strictes  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . Tout intervalle ouvert non vide contient un nombre rationnel et un nombre irrationnel.

### 3 Ensembles, applications (3 semaines)

#### 1. Rappels de Terminale.

- (a) Ensembles, inclusion. Fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (b) Fonctions monotones. Théorème des valeurs intermédiaires.
2. Ensembles, inclusion, union, intersection, complémentaire. Notations  $\{x_1, \dots, x_n\}$  et  $\{x \in A \mid P(x)\}$ .
3. Ensemble de parties. Nombre de parties d'un ensemble à  $n$  éléments. Nombre de parties à  $k$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments.
4. Produit cartésien de deux ensembles.
5. Application d'un ensemble dans un autre, restriction d'une application. Composition. Image et image réciproque.
6. Injection, surjection, bijection et bijection réciproque (bijections vues en Terminale).
7. Application du théorème des valeurs intermédiaires : existence et propriétés (continuité et monotonie) de la réciproque d'une application monotone et continue d'un intervalle dans un autre.
8. Transformation géométrique du plan :
  - (a) Exemples d'application du plan muni d'un repère orthonormé direct dans lui-même : translation, homothétie. Points invariants, composition.
  - (b) Utilisation des nombres complexes : translation, homothétie, rotation.

### 4 Introduction à l'algèbre linéaire (2 semaines)

1. Système d'équations linéaires, méthode du pivot de gauss.
2. Espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  avec  $n = 1, 2, 3$ , sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Sous-espace vectoriel engendré par une partie.
3. Famille libre, famille génératrice, bases d'un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n = 1, 2, 3$ . Dimension d'un sous-espace vectoriel.

### 5 Analyse (3 semaines)

1. **Rappels et approfondissement de Terminale** : les points ci-dessous ont déjà été vus pour la plupart sans démonstration en Terminale. La propriété de la borne supérieure permet de progresser dans leur compréhension.
  - (a) Limite finie ou infinie en un point  $\{x_0\}$  d'une fonction  $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , limite finie ou infinie en  $\pm\infty$ . Unicité de la limite. Limite à droite, limite à gauche. Formulation avec des quantificateurs<sup>1</sup>.
  - (b) Opérations sur les limites : somme, produit, quotient, composée. Forme indéterminée.
  - (c) Toute fonction monotone admet une limite finie ou infinie.
  - (d) Fonctions continues. Utilisation de la continuité pour les calculs de limites. *Nouveau* : prolongement par continuité.
  - (e) Dérivation : taux d'accroissement, nombre dérivée en un point d'une fonction définie sur un intervalle. Dérivée à droite et à gauche.
  - (f) Fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle. Dérivée des fonctions usuelles : polynômes, cosinus et sinus, exponentielle et logarithme. *Nouveau* : fonction puissance  $x \mapsto x^\alpha$  où  $\alpha$  est un réel.
  - (g) Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. *Nouveau* : dérivée des fonctions composées, dérivée d'une bijection réciproque. Dérivée de  $x \mapsto x^\alpha$ , avec  $\alpha$  réel.
  - (h) Dérivation et monotonie. Établir un tableau de variation, reconnaître une bijection.
2. Applications de la dérivation :

---

1. La manipulation des quantificateurs pourra être approfondie en RM1.

- (a) Calcul de limites en reconnaissant un taux d'accroissement.
  - (b) Définitions et propriétés des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques, cosinus, sinus et tangente. Fonctions dérivées.
3. Fonctions de deux variables réelles.
- (a) Dérivée partielle.
  - (b) Exemples d'études de surfaces  $z = f(x, y)$  par sections planes, plan tangent en un point (existence admise).
4. Résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre sans second membre.